

# De Onvolledigheidsstelling van Kurt Gödel

Pieter Rogaar

20 november 2005

De wiskunde is altijd al een wetenschap geweest die zichzelf tot doel stelde abstracties te doorgronden en hanteerbaar te maken. Vooral het begrip 'bewijs' heeft hier een centrale rol in gespeeld. De oude Grieken leverden al bewijzen over meetkundige constructies, en met nieuwere vakgebieden als differentiaalrekening werd het belang van een duidelijk begrip van wat we met 'bewijzen' bedoelen steeds groter. Daarom is het des te vreemder dat er tot 1920 nooit een luide roep is geweest om een definitie van dit begrip. In dat jaar 1920 stelde de beroemde wiskundige David Hilbert het als uitdaging voor alle wiskundigen over de hele wereld om ale wiskundige theorieën in één stelsel van grondwaarheden te vatten, en zo het bewijzen van nieuwe stellingen te reduceren tot elementaire rekenoperaties. Dit prachtige plan, dat bekend stond als Hilbert's programma, is echter gedwarsboomd in 1931, door een 25-jarige wiskundige genaamd Kurt Gödel.

In 1931 publiceerde Gödel in het tijdschrift *Monatshefte für Mathematik und*

*Physik* een artikel getiteld "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I". De 'I' aan het einde was bedoeld om aan te duiden dat er nog een artikel zou volgen. Dit tweede artikel is nooit geschreven, want de implicaties van het eerste waren zo groot dat ze een eigen onderzoeksgebied zouden rechtvaardigen. Het artikel behandelde de zogenaamde onvolledigheidsstelling. Globaal luidt deze stelling als volgt:

Iedere consistente axiomatische formulering van de getaltheorie is onvolledig.

Om deze stelling en het bijbehorende bewijs goed te kunnen begrijpen, is het belangrijk van tevoren een aantal termen te verklaren. Centraal in de stelling en het bewijs staat het begrip axioma. Een axioma verwoordt een basisuitspraak, een uitgangspunt van waaruit we andere stellingen kunnen afleiden. De uitspraken 'Nul is een natuurlijk getal' of 'De kortste verbinding tussen twee punten is een rechte lijn' zijn voorbeelden van axioma's. Een wiskundige theorie bestaat niet alleen uit stellingen en bewijzen, maar ook uit zulke axioma's. Heel formeel bekeken bestaat de theorie alleen maar uit een aantal axioma's, het zogenaamde axiomatische stelsel, en de regels waarmee nieuwe uitspraken bewezen kunnen worden. De verzameling van uitspraken waar het stelsel over handelt heet het *domein* van het stelsel.

Zo'n axiomatisch stelsel vormen bijvoorbeeld de axioma's van de Peano-aritmetiek:

- Nul is een natuurlijk getal
- Ieder natuurlijk getal heeft een opvolger
- Nul is niet de opvolger van een natuurlijk getal
- Verschillende natuurlijke getallen hebben verschillende opvolgers
- Als een eigenschap  $A$  voor het getal nul geldt, en als voor alle natuurlijke  $n$  geldt dat  $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$ , dan geldt  $A$  voor alle natuurlijke  $n$ .

Dit axiomatische stelsel legt heel formeel vast wat we met de verzameling  $\mathbb{N}$  bedoelen. Voor de duidelijkheid: Het laatste axioma legt het concept van volledige inductie axiomatisch vast.

Het is belangrijk om in te zien dat een axiomatisch stelsel, gecombineerd met de bijbehorende afleidingsregels, niet automatisch alleen maar ware uitspraken produceert. Een functie die aan iedere uitspraak een waarheidswaarde toekent, een zogenaamde waarheidsfunctie, is niet iets dat voortkomt uit een axiomatisch stelsel. In het licht van dit onderscheid kennen we twee belangrijke begrippen die het verband tussen waarheid en afleidbaarheid weergeven. Ten eerste heet een axiomatisch stelsel *consistent* als er alleen maar ware uitspraken bewezen kunnen worden. Ten tweede heet een axiomatisch stelsel *volledig* als iedere ware uitspraak in het domein van het stelsel bewezen kan worden. Het zal duidelijk zijn dat zowel consistentie als volledigheid zeer wenselijke eigenschappen zijn voor een axiomatisch stelsel.

Nu zijn we in staat om te begrijpen wat de stelling zegt. Er staat dat ieder

axiomatisch stelsel dat de getaltheorie beschrijft niet volledig is als het consistent is. Als we de getaltheorie zo formuleren dat er geen onwaarheden afgeleid kunnen worden, zijn er dus altijd ware uitspraken die onbewijsbaar zijn.

Het bewijs draait om het vinden van zo'n ware uitspraak zonder bewijs. We gaan uit van een willekeurige consistente formulering van de getaltheorie. Een begrijpelijke keuze voor een startpunt vormt de zogenaamde Epimenides-paradox, die in veel logische puzzels terugkomt. De kern van deze paradox wordt gevormd door de zin *Deze zin is niet waar*. Het probleem is evident: Als de zin waar is, is deze niet waar, en als deze niet waar is, dan is deze waar! Gödel nam deze zin en vertaalde hem als volgt:

*"Deze uitspraak heeft geen bewijs binnen de getaltheorie."*

Toen liep Gödel echter tegen een probleem aan. Voor het bewijs van de onvolledigheid van het axiomatische stelsel had hij niet zomaar een ware uitspraak zonder bewijs nodig, deze uitspraak moest ook in het domein van het axiomatische stelsel liggen. Het domein van de getaltheorie zijn de eigenschappen van de gehele getallen, en de uitspraak die hij had gegenereerd was er een over een uitspraak, niet over eigenschappen van gehele getallen.

Wat Gödel deed om dit probleem op te lossen, is zeker briljant te noemen. Hij moest immers op een kunstmatige wijze uitspraken over uitspraken in de

getaltheorie zien te betrekken, en dus zorgen dat uitspraken over uitspraken equivalent werden aan uitspraken over getallen. Hij besloot iedere teken dat gebruikt wordt om uitspraken te doen in de getaltheorie een bepaalde getalswaarde te geven, en de getalswaarde van een uitspraak, een opeenvolging van deze tekens, te kiezen als de aaneenschrijving van deze getallen. Zo zou bijvoorbeeld het derde axioma van Peano als volgt vertaald kunnen worden. Eerst zetten we de uitspraak om in wiskundige notatie, waarbij  $Sx$  staat voor de opvolger van  $x$ :

$$\forall a : \neg Sa = 0.$$

Daarna kennen we op een vrij te kiezen manier driecijferige getallen toe aan ieder teken en krijgen bijvoorbeeld

$$626.262.636.223.123.262.111.666$$

als getalsmatige weergave van het derde axioma. Ook predikaatsletters krijgen op deze manier een getalswaarde toegekend, omdat de predikaten niets anders zijn dan (een opeenvolging van) elementaire getaltheoretische uitspraken. Het predikaat  $R(x, y)$ , met de betekenis "x vormt een bewijs voor y", kunnen we dus ook coderen en daarna gebruiken als getal. Dit principe van coderen van getaltheoretische uitspraken heet de "Gödel Code", en het is een buitengewoon krachtig instrument om de getaltheorie in staat te stellen uitspraken over zichzelf te doen.

We passen deze nieuwverworven techniek toe op onze uitspraak en maken zo het predikaat

$$"A(x) = x \text{ heeft geen bewijs in de getaltheorie}."$$

Formeler genoteerd is dit 'het is niet zo dat er een  $y$  bestaat, zodanig dat  $y$  een bewijs vormt voor  $x$ '. In wiskundige notatie:

$$\neg \exists y : R(y, x).$$

Nu passen we onze Gödel Code toe en verkrijgen de getalsmatige weergave van  $A(x)$ , namelijk  $\hat{A}$ . Tot slot moeten we het predikaat nog op zichzelf laten werken, en dus verkrijgen we

$$A(\hat{A}) = \hat{A} \text{ heeft geen bewijs in de getaltheorie.}$$

Deze uitspraak gaat over een eigenschap van het gehele getal  $\hat{A}$ , en valt daarmee in het domein van de getaltheorie. Om het bewijs af te ronden onderscheiden we twee mogelijke gevallen:

- De uitspraak  $A(\hat{A})$  heeft een bewijs. Omdat de gebruikte formulering van de getaltheorie consistent is, is  $A(\hat{A})$  dus waar. Dus geldt de inhoud van de uitspraak en heeft  $A(\hat{A})$  geen bewijs. Dit vormt een tegenspraak.
- De uitspraak  $A(\hat{A})$  heeft geen bewijs. Dan geldt de inhoud van de uitspraak en is  $A(\hat{A})$  waar.

Blijkbaar is de enige mogelijkheid dat  $A(\hat{A})$  waar is en geen bewijs heeft. Met het vinden van zo'n uitspraak is het bewijs rond.  $\square$

Over de onvolledigheidsstelling bestaat een aantal misverstanden. Zo is het

(veel) te kort door de bocht om te zeggen dat de stelling zegt dat alle consistente axiomatische stelsels onvolledig zijn. Een bekend tegenvoorbeeld is bijvoorbeeld de propositielogica. Deze heeft niet voldoende uitdrukkingkracht om onvolledig te zijn. De onvolledigheidsstelling van Gödel geldt voor alle consistente axiomatische stelsels van voldoende kracht, namelijk om primitief-recursieve uitspraken te doen. Een primitief-recursieve uitspraak is een uitspraak die in het stelsel in een vooraf te bepalen maximaal aantal stappen geverifieerd of gefalsificeerd kan worden. Een voorbeeld van een primitief-recursieve uitspraak is het priem zijn van een natuurlijk getal. Een voorbeeld van een niet-primitief-recursieve uitspraak is het eindigen van het Collatz-vermoeden<sup>1</sup>, ook wel bekend als het  $3n+1$ -vermoeden, voor een bepaalde beginwaarde. In het bewijs van de onvolledigheidsstelling wordt onder meer gebruik gemaakt van het feit dat het predikaat  $R(x, y)$  een primitief-recursieve uitspraak is, dus dat van tevoren berekend kan worden hoeveel stappen hoogstens nodig zijn om te bepalen of een reeks uitspraken een bewijs vormt voor een stelling.

Verder wordt vaak gedacht dat als men de gevonden ware en onbewijsbare uitspraak toevoegt als axioma, men een volledig en consistent axiomatisch stelsel verkrijgt. Dit is onjuist, want als men deze uitspraak als axioma opneemt, krijgt men óf een inconsistent stelsel, of een nieuw consistent axiomatisch stelsel met minstens even grote uitdrukkingkracht, waarvoor de onvolledigheidsstelling dus opnieuw opgaat.

Wat voor belangrijke implicaties heeft de onvolledigheidsstelling? Om te beginnen geldt de stelling en de equivalente logische omkering, dat wil zeggen dat iedere volledige axiomatische formulering van de getaltheorie inconsistent is. Hieruit volgt verder dat bewijsbaarheid, waarheid en uitdrukkingkracht van het onderliggende stelsel nooit samen zullen vallen. De grootste klap kreeg David Hilbert te verduren, toen hij begreep dat Gödels stelling een regelrecht bewijs was voor het tegendeel van wat hij in zijn programma wilde bereiken.

Al met al kunnen we stellen dat de onvolledigheidsstelling verregaande implicaties heeft voor de wiskunde als geheel. Niet alleen is het bewijs een parel van expressieve kracht van axiomatische stelsels, doordat het ze de mogelijkheid geeft de ultieme uitspraken te doen: die over zichzelf. Vooral is het de schokgolf die door de wiskundige wereld is gereisd en als resultaat een heel andere blik op waarheid en bewijsbaarheid heeft achtergelaten.

---

<sup>1</sup>Zie [http://en.wikipedia.org/wiki/Collatz\\_conjecture](http://en.wikipedia.org/wiki/Collatz_conjecture) voor een duidelijke uiteenzetting over het Collatz-vermoeden