De Onvolledigheidsstelling van Kurt Gödel

Pieter Rogaar

LPC Studentenseminarium
27 oktober 2005

Inleiding

1900: Hilbert wil wiskunde als geheel formaliseren.

Rond 1920: Strijd tussen Brouwer en Hilbert. Brouwer was voorstander van het intuïtionisme.

1931: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, Monatshefte für Mathematik und Physik, *Kurt Gödel.*

Axiomatische stelsels

- Hoeven niet afgeleid te worden.

- **Voorbeeld.** *(Peano aritmetiek)*

◇ 0 is een natuurlijk getal.
◇ Elk natuurlijk getal heeft een opvolger.
◇ Verschillende natuurlijke getallen hebben verschillende opvolgers.
◇ 0 is niet de opvolger van een natuurlijk getal.
◇ $[A(0) \wedge (A(n) \Rightarrow A(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbf{N} : A(n)$.

De onvolledigheidsstelling

Stelling:

Iedere consistente axiomatische formulering van de getaltheorie bevat onbeslisbare uitspraken (is onvolledig).

- *Consistent:* Iedere bewijsbare uitspraak is waar.
- *Volledig:* Iedere ware uitspraak in het domein is bewijsbaar.

Bewijs:

We gaan uit van een willekeurige consistente formulering van de getaltheorie.

Gödel wilde een paradox gebruiken uit de gewone taal om zijn stelling te bewijzen.

De zin ”*Deze zin is onwaar*” vormt de kern van het bewijs.

Gödel veranderde deze zin iets en paste deze toe op de getaltheorie:

”Deze uitspraak heeft geen bewijs binnen de getaltheorie.”

Iets over het domein

We hebben nu een paradoxale zin, mogelijk zonder bewijs, maar hoort deze ook bij de getaltheorie?

Getaltheorie: Theorie die zich bezighoudt met eigenschappen van de gehele getallen.

Deze uitspraak hoort dus niet bij de getaltheorie. Hij gaat immers niet over gehele getallen.

Getaltheorificatie

Ken aan iedere uitspraak een geheel getal toe. Dan gaat de stelling over een getal en is dus getaltheorie geworden!

Voorbeeld:

$$\forall a :\sim Sa = 0$$

wordt 626.262.636.223.123.262.111.666

De keuze van de codering is vrij willekeurig.

Het stelsel beschrijft zichzelf

Ook predikaatsletters krijgen een getal. Deze predikaten zijn immers niets anders dan een reeks getaltheoretische uitspraken.

Zo staat $R(x, y)$ voor de uitspraak

$$\text{"}x \textit{ is een bewijs voor } y\text{"}.$$

Dit kunnen we vervolgens coderen.

De theorie is nu in staat om uitspraken over zichzelf te doen. Dit principe wordt de *Gödel Code* genoemd.

Verdere uitwerking:

"$A(x) = x$ heeft geen bewijs in de getaltheorie."

Dit wordt in formele notatie:
$A(x) = \sim \exists y : R(y, x)$.

We coderen deze zin met een Gödel Code en noemen het resultaat $\hat{A}$.

Invullen in zichzelf:

$$A(\hat{A}) = \sim \exists y : R(y, \hat{A}).$$

Ofwel:
"$A(\hat{A}) = \hat{A}$ heeft geen bewijs in de getaltheorie."

Slot van het bewijs:

We onderscheiden twee gevallen:

- *A heeft een bewijs.* Omdat de theorie consistent is, is A dan waar. Dus heeft A geen bewijs. Tegenspraak.

- *A heeft geen bewijs.* Dan is A waar. Zo hebben we nu een ware uitspraak A zonder bewijs.

Hiermee is het bewijs rond.

Gevolgen

Als een formulering van de getaltheorie *consistent* is, is deze onvolledig.

Als een formulering van de getaltheorie *volledig* is, is deze inconsistent.

Misverstanden

- Alle axiomatische stelsels zijn onvolledig. Tegenvoorbeelden: triviaal stelsel, Euclidische meetkunde.
- Door toevoeging van axioma's kan het stelsel wel volledig worden.

Samenvatting

- Gebruik een zekere uitspraak die aan zichzelf refereert.

- Maak het systeem krachtig genoeg om uitspraken over uitspraken te bewijzen.

- Codeer de uitspraak. Zo ontstaat een ware uitspraak zonder bewijs!

Conclusie

Hilbert had het mis; waarheid en bewijsbaarheid zullen nooit geheel samenvallen.

Met moeite zijn er een paar onbeslisbare uitspraken in de wiskunde gevonden, maar dit zijn complexe logische constructies.
Misschien dat het $3n + 1$-vermoeden of het vermoeden van Goldbach onbeslisbaar is.

De hoofdzaak is dat er altijd onbeslisbare stellingen zullen zijn; de gedachte achter het bedrijven van wiskunde is veranderd.